Dr. M. Friesen WS 2016/2017

Wahrscheinlichkeitstheorie 1

Blatt 4

Aufgabe 1 *(4 Punkte)*
Seien X und $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Zufallsvariablen mit Werten in $\mathbb{R}$ und es gelte $X_n \longrightarrow X$ in Wahrscheinlichkeit. Es gebe ein $C > 0$ mit

$$|X_n(\omega)| \leq C, \quad n \in \mathbb{N}, \quad \omega \in \Omega.$$

Zeigen Sie, dass dann $X_n \longrightarrow X$ in $\mathcal{L}^1$ gilt.
Hinweis: Zeigen Sie zuerst, dass $\mathbb{P}\left(|X| \leq C + 1\right) = 1$.

Aufgabe 2 *(4 Punkte)*
Zeigen Sie, dass die Gleichverteilung auf $\left\{\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1\right\}$ für $n \to \infty$ schwach gegen die uniforme Verteilung auf $[0,1]$ konvergiert.

Aufgabe 3 *(4 Punkte)*
Geben Sie ein Beispiel für eine Folge $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$ und $\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ derart, dass die folgenden Eigenschaften gelten:

1. μ_n, μ sind absolut stetig bezüglich dem Lebesgue Maß auf $\mathbb{R}$.
2. $\mu_n \longrightarrow \mu$ schwach für $n \to \infty$.
3. Es gibt eine Menge $A \subset \mathbb{R}$ sodass $\mu_n(A)$ nicht gegen $\mu(A)$ konvergiert.

Aufgabe 4 *(4 Punkte)*
Sei $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$ und $\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$. Es bezeichne $C_c^\infty(\mathbb{R})$ den Raum der beliebig oft differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger, d.h. jedes $f \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ ist beliebig oft differenzierbar und es gibt ein $R > 0$ mit $f(x) = 0$ für $|x| \geq R$. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

1. $\mu_n \longrightarrow \mu$ schwach für $n \to \infty$.
2. Es gilt
$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\mathrm{d}\mu_n(x) \longrightarrow \int_{\mathbb{R}} f(x)\mathrm{d}\mu(x), \quad n \to \infty$$
für jedes $f \in C_c^\infty(\mathbb{R})$.

Bemerkung: Dieselbe Aussage gilt auch für $\mathbb{R}^d$ mit $d \geq 1$ anstelle von $\mathbb{R}$.